

Intégrale Complexe

L'intégrale d'une fonction complexe $f(z) = u + iv$ peut être évaluée directement

$$\int f(z)dz = F(z)$$

ou par décomposition

$$\int f(z)dz = \int (u + iv)(dx + idy) = \int (udx - vdy) + i \int (udy + vdx).$$

Théorème de Cauchy

Si $f(z)$ est holomorphe (analytique) dans un domaine D et sur sa frontière Γ

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Formules Intégrales de Cauchy

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i [f(z)]_{z=a}. \quad (a \text{ appelé pôle simple ou d'ordre 1.})$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}f}{dz^{n-1}} \right]_{z=a}. \quad (a \text{ appelé pôle d'ordre } n.)$$

Lorsque le dénominateur contient deux pôles simples, on décompose l'intégrale en deux parties puis on traite chaque pôle séparément.

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{1}{a-b} \left[\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-b} dz \right] = \frac{2\pi i}{a-b} \left([f(z)]_{z=a} - [f(z)]_{z=b} \right).$$

Si la courbe entoure un seul pôle, a par exemple, le résultat est plus simple:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 2\pi i \left[\frac{f(z)}{z-b} \right]_{z=a}.$$

- N.B:**
- Toutes les courbes fermées sont parcourues dans le sens inverse des aiguilles d'une montre: \odot . Lorsque la courbe est parcourue dans le même sens des aiguilles d'une montre: \ominus , l'intégrale acquiert un signe (-).
 - Un pôle qui se trouve à l'extérieur de la courbe fermée ne contribue pas à l'intégrale.

Exemple: si a est à l'extérieur de Γ : $\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0.$